

Modelos Matemáticos I Examen V

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Modelos Matemáticos I Examen V

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Roxana Acedo Parra

Granada, 2026

Asignatura Modelos Matemáticos I.

Curso Académico 2025-26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María José Cáceres Granados.

Descripción Prueba 2.

Fecha 26 de mayo de 2026.

Duración 105 minutos.

Ejercicio 1 (4 puntos). Para cada valor $0 \neq b \in \mathbb{R}$, determina el comportamiento asintótico de las soluciones de

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + ax_n = b, \quad (1)$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Un grupo de ecología está estudiando la posibilidad de emplear el modelo de Leslie para sus estudios. Para ello está analizando el comportamiento del modelo con una matriz sencilla, para después pasar a una de dimensión mayor, y con coeficientes extraídos de sus observaciones. La matriz que está estudiando es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De forma razonada, responde a las siguientes preguntas:

- a) (1 punto) ¿Qué ocurrirá con la población a largo plazo, en cuanto al número de hembras en cada grupo de edad y la pirámide de edad?
- b) (1 punto) ¿Cambia el comportamiento a largo plazo en función del dato inicial?
- c) (1 punto) Según este modelo, ¿cómo sería el comportamiento a largo plazo de la población si las probabilidades de pasar de un grupo al siguiente fuesen 0,5?

Ejercicio 3. Se pretende estudiar cómo se propaga una enfermedad en el seno de una comunidad de tamaño $N > 0$. Para ello, se considera que dicha comunidad está estructurada en los siguientes tres grupos de población:

- I = personas infectadas
- S = personas susceptibles de estarlo
- R = personas recuperadas

y se propone el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n - aS_nI_n \\ I_{n+1} &= (1 - b)I_n + aS_nI_n \\ R_{n+1} &= R_n + bI_n \end{aligned} \quad (2)$$

donde $a > 0$ y $b > 0$ representan el ritmo de contagio y el de recuperación, respectivamente. Asimismo, se cumple que

$$S_0 + I_0 + R_0 = N$$

donde $S_0 \geq 0$, $I_0 \geq 0$ y $R_0 \geq 0$ representan el número inicial de personas de cada grupo. Se pide:

- a) (1 punto) Determina el tipo de interacción que experimentan entre sí los grupos de población S e I .
- b) (1 punto) Calcula los puntos de equilibrio del modelo con sentido biológico.
- c) (1 punto) Para el caso en que $N = 10$, $a = 0,01$ y $b = 0,025$, estudia la estabilidad del punto de equilibrio ($S = 5$, $I = 0$, $R = 5$).